Mathématiques Financières
Chapitre 4 : Les Annuités

Pr. Fatima-Zahra AAZI
FSJES - Ain Chock

Sciences Économiques et Gestion (S2)
Ensembles {9, 10}

2019 - 2020

Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, la constitution d'un capital (placement ; épargne) ou le paiement d'un crédit ne se font généralement pas en une seule fois mais en plusieurs versements étalés sur des périodes. Ces versements périodiques (généralement de valeur constante) sont appelés des annuités.

Définition

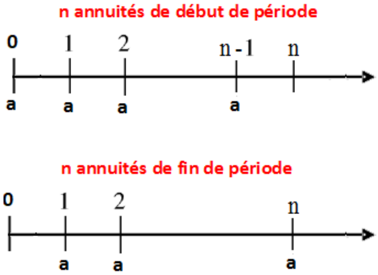
Les annuités : des sommes versées à intervalle régulier.

L'appellation annuités indique que la période des versements [1] est annuelle mais elle peut aussi être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle : on parle, dans ce cas, de semestrialités, trimestrialités ou mensualités.

1. intervalle de temps séparant deux versements successifs

Introduction

Selon la nature de l'opération, les annuités peuvent être payables en début ou en fin de période.

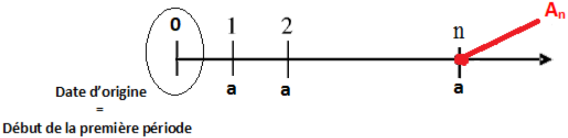


Objectif

L'objectif de ce cours est de trouver les formules de calcul de la valeur acquise (future) et de la valeur actuelle d'un ensemble d'annuités.

Annuités constantes de fin de période

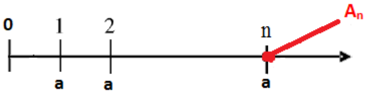
Valeur acquise à la date du dernier versement



A la date du dernier versement, la valeur acquise de **n** annuités constantes est :

$$\boxed{A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Valeur acquise à la date du dernier versement



Démonstration :

A_n est la somme des valeurs acquises des **n** annuités :

$a(1+i)^{n-1}$ *la première annuité produit des intérêts $n-1$ fois*
$a(1+i)^{n-2}$ *la deuxième annuité $n-2$ fois*
$a(1+i)^{n-3}$
...
$a(1+i)$ *l'annuité de la date $n-1$ produit des intérêts 1 seule fois*
a *la dernière annuité ne produit pas d'intérêts*

$$A_n = a + a(1+i) + ... + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

Valeur acquise à la date du dernier versement

On remarque que pour passer d'un terme à un autre, on multiplie par $(1+i)$, il s'agit donc des n termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1+i)$

La somme de ces termes A_n est :

$$A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemple

Calculer, au taux annuel de 4%, la valeur acquise de 6 annuités de 5000 Dh chacune à la date du dernier versement.

Solution :

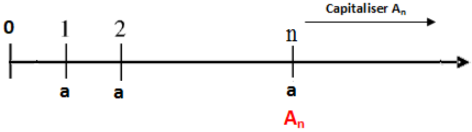
$$A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A_6 = 5000 \times \frac{(1+0,04)^6 - 1}{0,04}$$

$$A_6 = ...$$

Valeur acquise à une date postérieure au dernier versement

Le calcul de la valeur acquise à une date postérieure au dernier versement implique que les annuités, y compris la dernière, continuent à produire des intérêts (à être capitalisées) après la date n.



Connaissant la valeur des annuités à cette date (A_n), il suffit de calculer les intérêts qu'elle produit pendant la durée restante
Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{A_{n+x} = A_n \times (1+i)^x}$$

Avec :
x : le nombre de périodes après la date n
A_{n+x} : la valeur acquise après $n+x$ périodes

Exemple

Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de 5000 Dh payables du 31/12/2000 au 31/12/2018 :

- au moment du dernier versement
- 6 mois après le dernier versement
- deux années après le dernier versement

(taux de 6%)

Exemple - Solution

Au moment du dernier versement, on applique la formule :

$$A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A_{19} = 5000 \times \frac{(1,06)^{19} - 1}{0,06}$$

Exemple - Solution

6 mois suivant le dernier versement :

La période des versements est annuelle : 6 mois $\rightarrow$ **x = 6/12 = 1/2**

$$A_{n+x} = A_n \times (1+i)^x$$

$$A_{19+1/2} = A_{19} \times (1,06)^{1/2}$$

2 années suivant le dernier versement ($x = 2$)

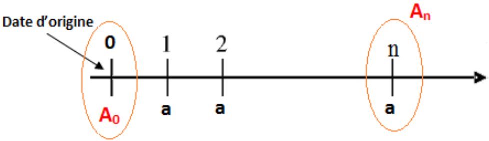
$$A_{n+x} = A_n \times (1+i)^x$$

$$A_{21} = A_{19} \times (1,06)^2$$

Valeur actuelle à la date d'origine

En plus du calcul de la valeur acquise, il est utile de pouvoir calculer la valeur actuelle d'un ensemble d'annuités.

C'est le cas par exemple d'un individu qui va percevoir une certaine somme pendant n années et qui cherche à calculer l'équivalent, de ces sommes futures, aujourd'hui.



Connaissant la valeur des annuités à la date n, la valeur à l'origine[2] correspond tout simplement à la valeur actuelle de A_n à cette date.

2. Une période avant le premier versement

Valeur actuelle à la date d'origine

$$A_0 = A_n \times (1+i)^{-n}$$

$$A_0 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

$$\boxed{A_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Exemple

Calculer, au taux annuel de 4%, la valeur à l'origine d'une suite de 6 annuités de 5000 Dh chacune.

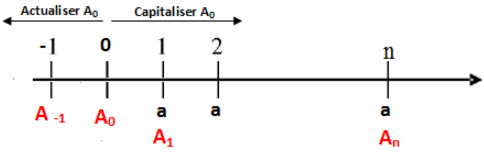
Solution :

$$A_0 = A_6 \times (1 + 0,04)^{-6}$$

$$A_0 = 5000 \times \frac{1 - (1 + 0,04)^{-6}}{0,04}$$

Valeur actuelle à une date donnée

De la même manière, on peut calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuité à n'importe quelle date (avant ou après la date d'origine). L'idée est de capitaliser ou actualiser A_0 :



$$\boxed{A_{0\pm x} = A_0 \times (1+i)^{\pm x}}$$

Un an avant la date d'origine $\quad A_{-1} = A_0 \times (1+i)^{-1}$

6 mois avant la date d'origine $\quad A_{-1/2} = A_0 \times (1+i)^{-1/2}$

Un an après la date d'origine $\quad A_1 = A_0 \times (1+i)^{1}$

Exemple

Calculer, au taux annuel de 4%, la valeur d'une suite de 6 annuités de 5000 Dh chacune un an avant la date d'origine .

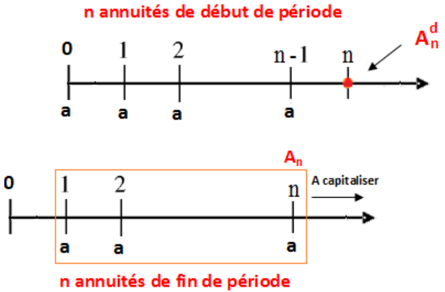
Solution :

$$A_{-1} = A_0 \times (1 + 0,04)^{-1}$$

Annuités constantes de début de période

Valeur acquise à la date n

On s'intéresse au calcul de la valeur acquise d'une suite d'annuités de début de période, à la date n (une période après le dernier versement).



Connaissant A_n : la valeur acquise à la date du dernier versement, on peut écrire :

$$A_n^d = A_n \times (1+i)$$

$$\boxed{A_n^d = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)}$$

Exemple

Calculer, au taux annuel de 6%, la valeur acquise de 12 annuités de 5000 Dh chacune, un an après le dernier versement.

Solution :

$$A_n^d = A_n \times (1+i)$$

$$A_{12}^d = A_{12} \times (1+i)$$

$$A_{12}^d = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

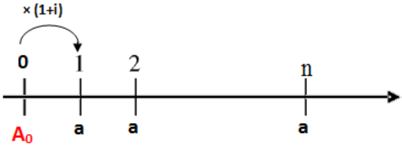
$$A_{12}^d = 5000 \times \frac{(1+0,06)^{12} - 1}{0,06} \times (1+0,06)$$

$$A_{12}^d = \ldots$$

Valeur actuelle à la date d'origine

On cherche la valeur actuelle au moment du premier versement A_0^d.

A_0^d peut être calculée à partir de A_0 (valeur actuelle une période avant le premier versement) :



$$A_0^d = A_0 \times (1+i)$$

$$\boxed{A_0^d = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)}$$

Exemple

Calculer, au taux annuel de 6%, la valeur actuelle de 11 annuités de 12000 Dh chacune, à la date du premier versement.

Solution :

$$A_0^d = A_0 \times (1+i)$$

$$A_0^d = 12000 \times \frac{1-(1+0,06)^{-11}}{0,06} \times (1+0,06)$$

Synthèse

Annuités de fin de période	Valeur acquise	A la date du dernier versement	$A_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
		A une date postérieure	$A_{n+x} = A_n \times (1+i)^x$
	Valeur actuelle	A la date d'origine	$A_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
		A une date donnée	$A_{0\pm x} = A_0 \times (1+i)^{\pm x}$
Annuités de début de période	Valeur acquise	A la date « n »	$A_n^d = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$
	Valeur actuelle	A la date d'origine	$A_0^d = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)$